



Uplifting Mathematics for All

Guia didàctica

Punts que exploten

(Exploding Dots™)

Experiència 5:

La divisió

Visió general	2
La divisió	3
El residu	6
Material A: <i>La divisió i el residu</i>	7
Solucions a les preguntes de «Material A»	8
Material B: <i>Exploracions brutals</i>	10

Recursos relacionats:

- Podeu accedir als vídeos i més recursos a [Exploding Dots - Global Math Project](#).
- Accedeix a [actividades guiadas en Desmos](#).
- Juga en línia amb el giny de [Dhimad](#) (inclou àlgebra).

Visió general

Objectius de l'alumne

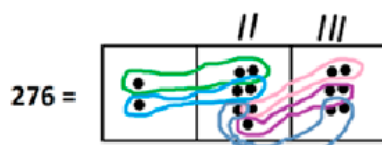
La divisió es pot interpretar com un procés de càlcul: l'operació $276 \div 12$ consisteix simplement a preguntar quants grups de 12 es poden trobar en una imatge de 276. Els gràfics dels punts i les caselles fan que aquest procés de càlcul sigui excepcionalment natural.

Breu resum de l'experiència

Per calcular $276 \div 12$, podem dibuixar en un full una imatge formada per 276 punts i, després, formar grups de dotze punts encerclant-los. El nombre de grups de dotze que n'obtenim és la solució de la divisió.

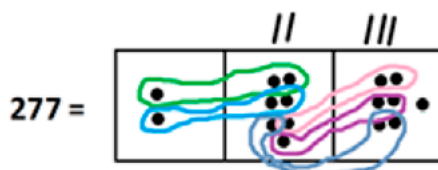
Però aquest mètode és molt poc eficient per calcular una divisió!

De manera alternativa, podem dibuixar una imatge de 276 en una màquina $1 \leftarrow 10$ i buscar-hi grups de dotze. De seguida veiem que hi ha 2 grups en la casella de les desenes i 3 en la casella de les unitats, és a dir, que hi ha 23 grups en total. Tenim que $276 \div 12 = 23$.



$$12 = \begin{array}{|c|c|} \hline \bullet & \bullet \\ \hline \end{array}$$

També s'hi pot detectar el residu fàcilment:



$$277 \div 12 = 23 R 1$$

Introducció

Podeu veure el vídeo de benvinguda, en què James introdueix aquesta experiència, aquí: <https://globalmathproject.org/exploding-dots/> [1:43 minuts].

La divisió

Podeu veure un vídeo de James sobre aquesta lliçó aquí:
<https://globalmathproject.org/exploding-dots/> [7:38 minuts].

Aquí hi ha el guió que segueix James quan explica la lliçó a la pissarra. No cal dir que podeu adaptar-lo com més us convingui. Al vídeo podreu veure quan i com dibuixa James els diagrames i com els va ampliant.

La suma, la resta i la multiplicació. I ara toca la divisió.

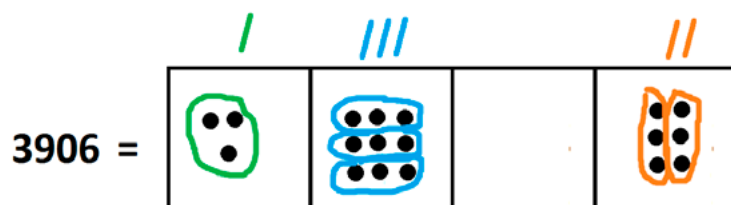
Comencem a poc a poc, amb una divisió a la qual potser li trobarem de seguida la solució.

Què és $3906 \div 3$?

La resposta és 1302.

Si penseu en 3906 com $3000 + 900 + 6$, aleshores podrem veure que dividir per tres dona $1000 + 300 + 2$.

Efectivament, això ho podem veure si dibuixem una imatge de 3906 en una màquina $1 \leftarrow 10$. Hi veiem grups de tres: 1 grup en la casella dels milers, 3 grups en la casella de les centenes i 2 grups en la casella de les unitats.

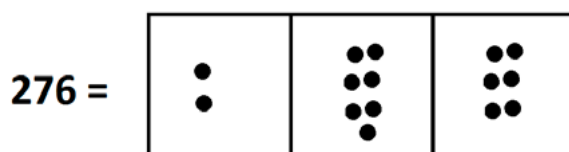


Aquí ho tenim! Estem fent divisions i veiem que els resultats surten sols!

Amb la divisió per una xifra no hi ha problemes. Però què passa amb la divisió per més xifres? La gent acostuma a dir-ne *divisió llarga*.

Vegem aquesta divisió: $276 \div 12$.

Aquí tenim una imatge de 276 en una màquina $1 \leftarrow 10$:



I estem buscant grups de dotze en aquesta imatge de 276. Així es veu el dotze.

$$12 = \begin{array}{|c|} \hline \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \\ \hline \end{array}$$



En realitat, això no és correcte, perquè a la nostra màquina $1 \leftarrow 10$ hi hauria una explosió i apareixeria el dotze en forma d'un punt al costat de dos punts. Però sempre hem de tenir present que en aquesta imatge, en realitat, els dotze punts es troben a la casella de més a la dreta:

$$12 = \begin{array}{|c|c|} \hline \bullet & \bullet \bullet \\ \hline \end{array}$$

Molt bé. Estem buscant grups de dotze a la nostra imatge de 276. Hi veiem un punt al costat de dos punts, al diagrama?

Sí, aquí n'hi ha un. És un grup de dotze en forma de «cuc» (ja veureu que els cucs es poden modelar molt bé).

$$276 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \bullet & \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet & \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \\ \hline \end{array}$$



En cada cuc de dotze veiem que, de fet, els dotze punts es troben a la part dreta del cuc. Per tant, hem trobat un grup de dotze en la casella de les desenes.

$$276 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \bullet & \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet & \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \\ \hline \end{array}$$

Aquí tenim una qüestió subtil però rellevant: els dotze punts del cuc se situen a la part dreta del cuc. Potser caldrà recordar-ho als alumnes més d'una vegada a mesura que el procés de divisió avança. Hi ajudarà dir-los: «Si haguéssiu de fer no explotar alguns punts a dins del cuc, quins punts podrien no explotar (i quedar-se al cuc) i en quina casella acabarien, finalment, els dotze punts?».

I hi ha més grups de dotze:

$$276 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \bullet & \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet & \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \\ \hline \end{array}$$

Hi veiem, en total, 2 grups en la casella de les desenes i 3 grups en la casella de les unitats. Així doncs, la solució de $276 \div 12$ és 23.



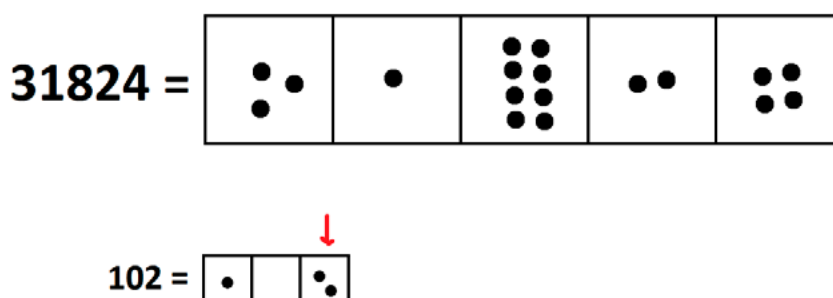
PER CERT..., DEIXO LA IMATGE DE $276 \div 12$ A LA PISSARRA! AIXÒ ÉS IMPORTANT PER SI ANEU A L'EXPERIÈNCIA 6, QUE TRACTA DELS POLINOMIS. Una mica furtivament, dissimulo i no esborro aquesta part de la pissarra, tot i que continuem endavant amb més exemples i més treball.



Arribats a aquest punt, potser demano als alumnes que ho intentin per ells mateixos i facin $2783 \div 23$ i, després, $31824 \div 102$, i els comento que amb aquesta segona vam tenir un petit contratemps al vídeo. O potser faig simplement $31824 \div 102$ com a part de la lliçó. Tot depèn del que em sembli més adequat per als alumnes.

Fem un altre exemple. Calculem $31824 \div 102$.

Aquí en tenim la imatge:



Ara busquem grups d'un punt-sense punts-dos punts a la nostra imatge de 31824. (I recordeu que els 102 punts estan físicament ubicats a la dreta del tot de cada un dels conjunts que identifiquem.) Es tracta de la mateixa qüestió subtil però rellevant que comentàvem abans.

Podem detectar aquests grups. (Ara trobo massa embolicat dibuixar cucs: a partir d'aquí faré X, cercles i requadres. Cap problema, oi? I veieu que, al final, he marcat un grup doble amb un únic requadre?)



Ara es pot veure 312, que és la solució de $31824 \div 102$.

Normalment dedico un temps a explicar com s'adapta el mètode de divisió amb punts i caselles a l'algorisme tradicional. Em resulta complicat escriure sobre això perquè hi ha països que tenen sistemes notacionals diferents per a la divisió llarga i mètodes lleugerament distints per als algorismes. Per exemple, als Estats Units és ara habitual pensar en la divisió llarga com una «resta repetida», mentre que l'algorisme que s'ensenya a Sèrbia i a Austràlia, per exemple, té més misteri.

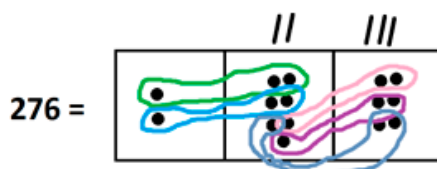
En aquest vídeo de la lliçó 5.6 (<https://globalmathproject.org/exploding-dots/>) podreu veure com és el mètode australià i què acostumo a fer jo amb els alumnes just en aquest moment. I, pel que fa al mètode estatunidenc, podeu llegir el text que hi ha a continuació d'aquest vídeo de la lliçó 5.6. En el cas del vostre país, entenc que el millor serà que mireu vosaltres com podeu adaptar el mètode de punts i caselles (que potser ja és força semblant), i que decidiu si voleu compartir-lo amb els vostres alumnes arribats en aquest punt.



El residu

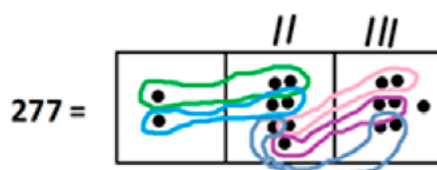
Podeu veure un vídeo de James sobre aquesta lliçó aquí:
<https://globalmathproject.org/exploding-dots/> [1:59 minuts].

Hem vist que $276 \div 12$ dona 23.



Imaginem-vos que, en lloc d'això, intentéssim calcular $277 \div 12$. Quina imatge n'obtindríem? Com l'hauríem d'interpretar?

Bé, veuríem la mateixa imatge que abans, però amb una diferència: la presència d'un punt extra, que no podem incloure en el grup de dotze:



Això demostra que $277 \div 12$ és igual a 23 amb un residu d'1.

Que es pot escriure així:

$$277 \div 12 = 23 R 1$$

O amb alguna notació equivalent per al residu. (La notació per al residu pot variar d'un país a l'altre.)

O podem ser una mica més precisos des del punt de vista matemàtic i dir que $277 \div 12$ dona 23, amb un punt més que cal dividir per dotze:

$$277 \div 12 = 23 + \frac{1}{12}$$

Si modifiqueu la imatge de $276 \div 12$ a la pissarra afegint-hi un punt perquè doni $277 \div 12$, procureu esborrar el punt extra sense donar-hi gaire importància perquè la imatge torni a ser la de $276 \div 12$. Necessitem aquesta imatge per quan ens posem amb els polinomis a l'experiència 6.

Material A: La divisió i el residu

Utilitzeu el material que trobareu a continuació per als alumnes que vulguin practicar amb les preguntes d'aquesta lliçó i reflexionar-hi després a casa. NO són deures, és totalment opcional. (N'hi ha una versió imprimible al document *Punts que exploten. Experiència 5.*)

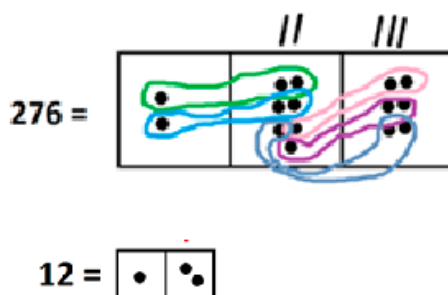
Punts que exploten

Experiència 5: La divisió

Podeu accedir als vídeos de totes les lliçons de *Punts que exploten* aquí:
<https://globalmathproject.org/exploding-dots/>

Material B: La divisió i el residu

En aquesta imatge veiem que $276 \div 12$ és igual a 23:

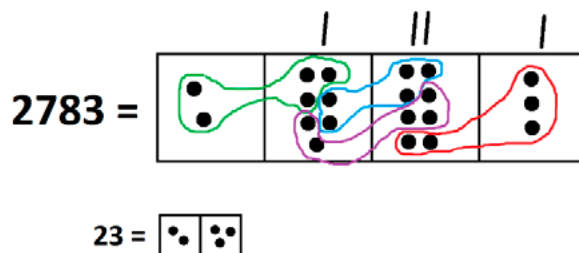


Aquí teniu algunes preguntes pràctiques que podeu intentar respondre, si voleu.

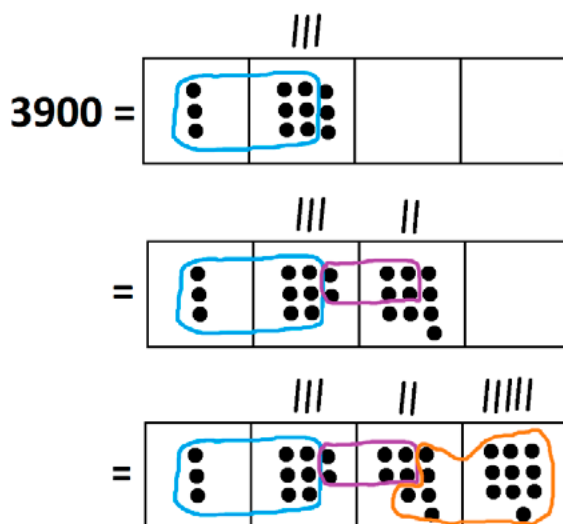
1. Calculeu manualment $2783 \div 23$ segons el mètode de punts i caselles.
2. Calculeu $3900 \div 12$.
3. Calculeu $46632 \div 201$.
4. Això demostra que $31533 \div 101$ és igual a 312 amb un residu de 21.
5. Calculeu $2789 \div 11$.
6. Calculeu $4366 \div 14$.
7. Calculeu $5481 \div 131$.
8. Calculeu $61230 \div 5$.

Solucions a les preguntes de «Material A»

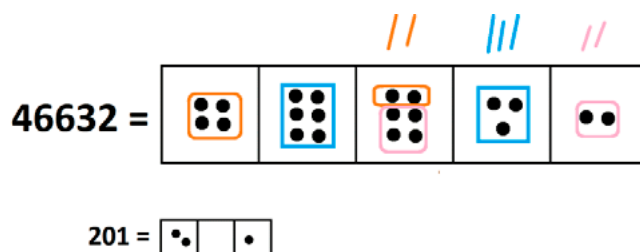
1. $2783 \div 23 = 121$.



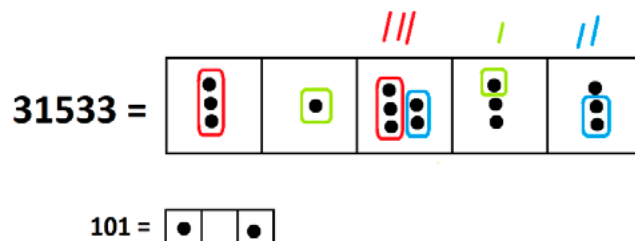
2. $3900 \div 12 = 325$. Hem de fer algunes no explosions pel camí. (Ho veieu, quin nivell d'eficiència que estic aconseguint amb els meus dibuixos de cucs modelables?)



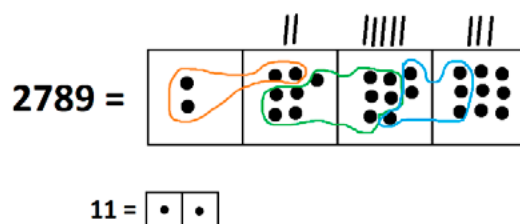
3. $46632 \div 201 = 232$.



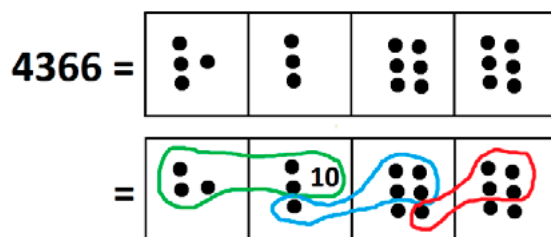
4. $31533 \div 101 = 312$ amb un residu de 21. És a dir, $31533 \div 101 = 312 + \frac{21}{101}$.



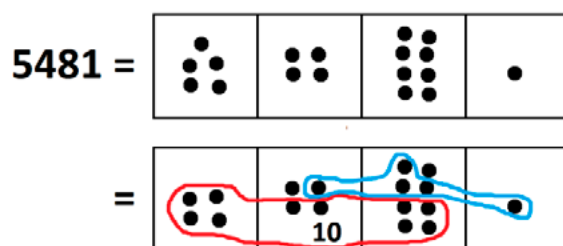
5. Tenim que $2789 \div 11 = 253$ amb un residu de 6. És a dir, $2789 \div 11 = 253 + \frac{6}{11}$.



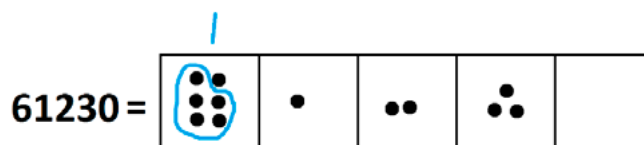
6. $4366 \div 14 = 311 + \frac{12}{14}$.



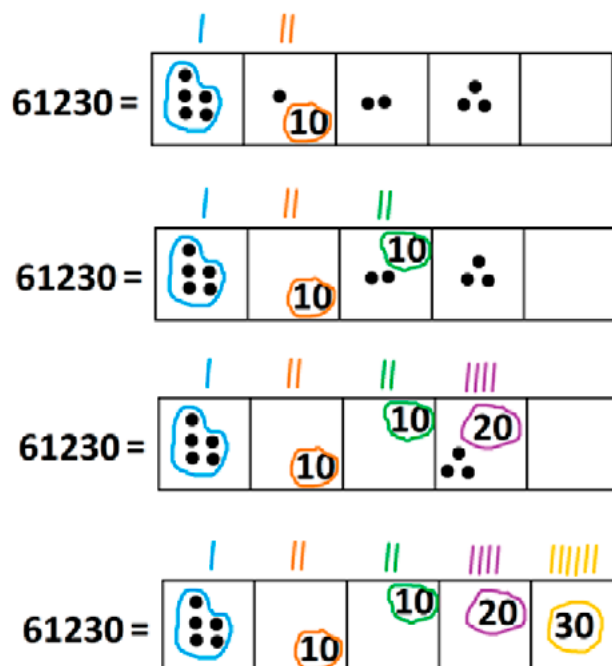
7. $5481 \div 131 = 41 + \frac{110}{131}$.



8. Efectivament, de seguida veiem un grup de cinc.



Fem algunes no explosions. (I millor ho escrivim amb xifres en comptes de dibuixar una pila de punts. Que n'arriba a ser d'avorrit, dibuixar punts!)



Veiem que $61230 \div 5 = 12246$.

Material B: Exploracions brutals

Utilitzeu el material següent per facilitar-lo als alumnes que vulguin reflexionar després a casa amb preguntes profundes relacionades amb aquesta experiència. NO són deures, és totalment opcional, però podria servir de font per a futurs projectes dels alumnes. (N'hi ha una versió imprimible al document *Punts que exploten. Experiència 5.*)

Punts que exploten

Experiència 5: La divisió

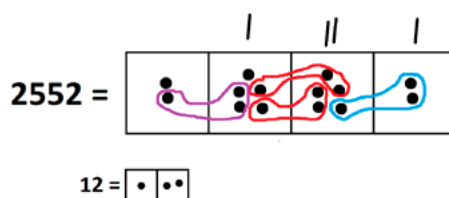
Podeu accedir als vídeos de totes les lliçons de *Punts que exploten* aquí:
<https://globalmathproject.org/exploding-dots/>

Material B: Exploracions brutals

Aquí teniu una investigació sobre una «gran pregunta»: podeu explorar-la o bé simplement reflexionar-hi. Divertiu-vos!

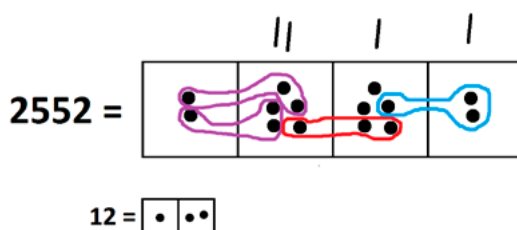
EXPLORACIÓ: D'ESQUERRA A DRETA? DE DRETA A ESQUERRA? EN QUIN ORDRE?

Quan es va demanar que es calculés $2552 \div 12$, en Kaleb va dibuixar aquesta imatge, que va obtenir després d'identificar grups de dotze, anant de dreta a esquerra:



Va dir que la solució de $2552 \div 12$ és 121 amb un residu de 1100.

La Mabel, per la seva banda, va identificar grups de dotze, anant d'esquerra a dreta en el diagrama que va fer per a la divisió:



Va concloure que $2552 \div 12$ és 211 amb un residu de 20. Tant en Kaleb com la Mabel tenen raó des del punt de vista matemàtic, però el seu professor els va comentar que la majoria de persones esperarien una solució amb un residu més petit: tant 1100 com 20 serien considerats residus estranys per a una divisió per dotze. També els va mostrar la solució que hi ha al llibre de text per a aquesta divisió:

$$2552 \div 12 = 212 R 8$$

Què han de fer en Kaleb i la Mabel per obtenir, als seus diagrames, la solució que dona el llibre de text?